Banque « Agro-Véto »
AT - 0506

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les problèmes I et II sont indépendants.

Problème I.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, on définit la fonction G_f de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt.$$

I.1.a. Montrer que la fonction G_f est dérivable sur I.

Indication : on pourra introduire une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{t}$.

I.1.b. Déterminer la fonction G'_f.

I.2.a. On définit la fonction f_1 de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, f_1(x) = 1.$$

Déterminer la fonction $G_1 = G_{f_1}$.

I.2.b. On définit la fonction f_2 de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, f_2(x) = \ln(x).$$

Déterminer la fonction $G_2 = G_{f_2}$.

I.3. Dans la suite du problème, H désignera la fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, H(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

I.3.a. Déterminer le signe de $H(\frac{\pi}{6})$ et $H(\frac{\pi}{2})$.

I.3.b. Montrer que : $\forall x \in I, |H(x)| \leqslant \ln(3)$.

I.4.a. Montrer que $\dfrac{\cos(t)}{t} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{2} + t\mathcal{E}(t)$ où $\mathcal{E}$ est une fonction définie sur I, de limite nulle en zéro.

I.4.b. Montrer que la fonction $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

I.4.c. En déduire que $H(x)$ tend vers $\ln(3)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

T.S.V.P

Notation : On notera désormais h le prolongement par continuité de H à $[0, +\infty[$ obtenu en posant : $h(0) = \ln(3)$.
I.5. Montrer que h est dérivable en 0.
I.6.a. Montrer que $\forall x \in I$, on a :

$$h(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

I.6.b. Montrer que $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
I.6.c. En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
I.7. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction h est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.
I.8. Montrer que pour tout n, entier naturel, on a :

$$h(\frac{2n+1}{2}\pi) = \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-1)^{n+k} \frac{\cos(u)}{u + (k+n)\pi} du.$$

Problème 2.

On dispose de deux variétés d'une même plante, génétiquement compatibles et discernables, appelées 1 et 2, semées dans des champs voisins, 1 et 2, de superficies égales et de même taux de rendement. A l'instant n, on notera $S_n(j)$ la proportion de variété 1 présente dans le champ j. A l'issue de l'année, on note $R_{n+1}(j)$ la proportion de grain de variété 1 récolté dans le champ j.

On note S_n le vecteur :

$$S_n = \begin{pmatrix} S_n(1) \\ S_n(2) \end{pmatrix}.$$

Première partie

On suppose avoir observé ici que les proportions des deux récoltes obéissent naturellement à la loi suivante :

$$R_{n+1}(1) = \frac{1}{100}(90S_n(1) + 10S_n(2)) \text{ et } R_{n+1}(2) = \frac{1}{100}(5S_n(1) + 95S_n(2)).$$

On replante systématiquement dans chaque champ à proportion de ce qu'on a récolté.

I 1. Donner la matrice de transition de S_n à S_{n+1}, c'est-à-dire la matrice M vérifiant :

$$S_{n+1} = MS_n.$$

I.2. Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $ker(M - \lambda I_2) \neq \{O\}$.

I.3. Déterminer deux vecteurs indépendants U_1 et U_2 de seconde coordonnée égale à 1, vérifiant : $MU_1 = U_1$ et $MU_2 = \frac{17}{20}U_2$.

I.4. Déterminer la matrice de passage, notée P, de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (U_1, U_2) ainsi que sa matrice inverse P^{-1}.

I.5. Calculer $D = P^{-1}MP$.

I.6 Calculer les coefficients de D^{10} à 10^{-5} près par défaut. En déduire les coefficients de M^{10} à 10^{-4} près.

I.7. On suppose avoir ensemencé initialement le champ 1 avec de la variété 1 et le champ 2 avec la variété 2 en quantités égales, c'est-à dire que $S_0(1) = 1$ et $S_0(2) = 0$. Donner les proportions de variétés 1 et 2 récoltées dans chaque champ à l'issue de la dixième année.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Pour toute la suite, on dit que la suite de matrices $Q_n = \begin{pmatrix} Q_n(1,1) & Q_n(1,2) \\ Q_n(2,1) & Q_n(2,2) \end{pmatrix}$ converge vers la matrice $Q = \begin{pmatrix} Q(1,1) & Q(1,2) \\ Q(2,1) & Q(2,2) \end{pmatrix}$ si $\forall (i,j) \in \{1,2\}^2$ la suite $Q_n(i,j)$ converge vers $Q(i,j)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - -

I.8. Montrer que la suite D^n converge vers une matrice qu'on précisera. Vérifier que les coefficients de M^n sont des combinaisons linéaires de coefficients de D^n. En déduire que la suite M^n converge vers la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

I.9. En reprenant l'ensemencement initial du I.7. donner les proportions limites des variétés 1 et 2 récoltées dans chacun des champs.

Deuxième Partie.
On modifie les caractéristiques des deux champs de sorte que les proportions de rendement soient données par la loi :

$$R_{n+1}(1) = \frac{1}{100}(AS_n(1) + (100 - A)S_n(2)) \text{ et } R_{n+1}(2) = \frac{1}{100}((100 - B)S_n(1) + BS_n(2)),$$

A et B étant des entiers compris entre 1 et 99.

On replante systématiquement dans chaque champ des quantités égales, et à proportion de ce qu'on a récolté.

T.S.V.P.

II 1. Donner la matrice de transition de S_n à S_{n+1}.

On notera $M(A, B)$ cette matrice.

II.2. Déterminer les deux valeurs réelles λ pour lesquelles $ker(M(A,B) - \lambda I_2) \neq \{0\}$ à l'aide de A et B.

II.3. Déterminer deux vecteurs indépendants U_1 et U_2 de première coordonnée égale à 1, vérifiant : $M(A,B)U_1 = U_1$ et $M(A,B)U_2 = (\frac{1}{100}B + \frac{1}{100}A - 1)U_2$.

II.4. Déterminer la matrice de passage, notée P, de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (U_1, U_2) ainsi que sa matrice inverse.

On note par la suite $D(A, B) = P^{-1}M(A, B)P$.

II.5. Déterminer J, la limite éventuelle de la suite de matrices $[D(A,B)]^n$ et les coefficients de la matrice $N(A,B) = PJP^{-1}$. Comment peut-on interpréter cette matrice ?

II.6. Montrer que $N(A,B) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ si et seulement si 2B-A=100.

II.7. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante on a : $N(A,B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

FIN