

# CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

OCTOBRE 2006

## COMPOSITION PORTANT SUR LA STATISTIQUE

### EPREUVE N° 35

Durée : 5 heures  
Coefficient : 2

SUJET :

#### PROBLEME I (5 points)

On désigne par  $(T)$  le triangle défini par les trois points  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$  et par  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = ae^{(x+y)}, \text{ si } (x, y) \in (T) \\ f(x, y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le nombre réel  $a$  pour que  $f$  soit la densité d'un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires absolument continues.

2. a) Déterminer les lois marginales de  $(X, Y)$ .

b) Calculer l'espérance et la variance de  $X$ , puis l'espérance et la variance de  $Y$ .

c) Calculer la covariance de  $(X, Y)$ , notée  $cov(X, Y)$ .

3. On considère la variable aléatoire  $S = X + Y$ .

Calculer son espérance et sa variance.

#### PROBLEME II (5 points)

On lance un dé bien équilibré, puis on observe le numéro sur la face supérieure. On considère les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies par :

$$\begin{cases} X = -1 \text{ si le résultat est impair} \\ X = 1 \text{ si le résultat est pair} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} Y = -2 \text{ si le résultat est } 1, 2 \text{ ou } 3 \\ Y = 0 \text{ si le résultat est } 4 \\ Y = 3 \text{ si le résultat est } 5 \text{ ou } 6 \end{cases}$$

1. Déterminer la distribution de probabilité de  $X$  et de  $Y$ .
2. Déterminer la distribution de probabilité du couple  $(X, Y)$ .
3. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Justifier.
4. Calculer l'espérance et la variance de  $X$  et de  $Y$ .
5. Calculer la covariance de  $(X, Y)$ , notée  $cov(X, Y)$ . En déduire le coefficient de corrélation de  $(X, Y)$  noté  $\rho(X, Y)$ .
6. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Z = X + Y$ . Puis calculer son espérance et sa variance.

### PROBLEME III (5 points)

Dans le but d'étudier la corrélation entre le prix  $X$  (en dollar) du baril de pétrole et l'indice INSEE de la construction noté  $Y$ , on a relevé les données suivantes :

Date	Octobre 2004	Janvier 2005	avril 2005	Juillet 2005	Octobre 2005
$X$	41	47	51	60	68
$Y$	1 267	1 269	1 270	1 276	1 278

1. Calculer les coordonnées du point moyen  $I = (\bar{X}, \bar{Y})$ .
2. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique double ainsi que le point moyen.

On prendra pour origine des axes le point  $I(40, 1260)$ .

3.
  - a) Calculer la covariance de  $(X, Y)$ , notée  $cov(X, Y)$ , puis le coefficient de corrélation  $\rho(X, Y)$ .
  - b) Déterminer l'équation de la droite de régression de  $Y$  par rapport à  $X$ . Tracer cette droite sur le graphique.
  - c) Peut-on considérer que la corrélation entre  $X$  et  $Y$  est linéaire ? Justifier votre réponse.

### PROBLEME IV (5 points)

Un concessionnaire d'une marque d'automobiles effectue une étude statistique des distances parcourues par un certain type de véhicule.

Le tableau suivant regroupe les distances (en km) parcourues par véhicule au cours des trois premières années pour un échantillon de 100 véhicules.

On note  $n$  le nombre de milliers de kilomètres parcourus en trois ans et par  $N$  le nombre de véhicules.

$n$	$n < 20$	$20 \leq n < 40$	$40 \leq n < 60$	$60 \leq n < 80$	$80 \leq n < 100$	$100 \leq n$
$N$	4	19	27	23	12	15

On effectue un test du khi-deux, au risque de  $\alpha = 5\%$  avec pour hypothèse  $H_0$  :

«Le kilométrage parcouru par véhicule suit la loi normale de paramètres :  
 $m = 60\,000$  et  $\sigma = 3\,000$ »

1. Dans cet objectif :

- a) Calculer les effectifs théoriques associés à cette hypothèse  $H_0$ .
- b) La valeur expérimentale calculée pour le khi-deux.
- c) Le nombre  $\nu$  de degrés de liberté .
- d) La valeur du seuil théorique  $\chi^2_\alpha$ .

2. Donner la conclusion du test.

**DOCUMENTS :**

**Tables des lois normale et du khi-deux**

# FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

<i>t</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de *t*

<i>t</i>	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

# LOI DU KHI-DEUX

Valeurs de  $\chi^2$  ayant la probabilité  $q = 1 - p$  d'être dépassées

$q$ $v$	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001
1		0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,01	1,42	2,37	3,67	4,64	6,25	7,82	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

## NOTA :

- Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.