CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

OCTOBRE 2006

COMPOSITION PORTANT SUR LES MATHEMATIQUES

EPREUVE N° 34

Durée : 5 heures
Coefficient : 2

SUJET :

PROBLEME I (10 points)

Les partie I, II et III peuvent se traiter de manière indépendante.

A toute fonction numérique f continue sur $\mathbb{R}$ on associe la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = f(0) \end{cases}$$

Partie I

1. Etudier la parité de g lorsque f est paire ou impaire.

2. Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que g est dérivable pour $x \neq 0$. Exprimer $g'(x)$ en fonction de x, $g(x)$ et $f(x)$.

4. Démontrer que si f est dérivable en 0, alors g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$ en fonction de $f'(0)$. On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 0 de la fonction f.

Partie II

Calculer $g(x)$ lorsque $f(x) = |x|$.

Partie III

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $g(x)$.

Partie IV

Dans cette partie on prend :

$$f(x) = |\sin x|$$

1. a) Calculer $g(x)$ pour $0 \leq x \leq \pi$. La fonction g est-elle dérivable pour $x = 0$?

b) Calculer $g(x)$ pour $\pi \leq x \leq 2\pi$.

c) Calculer $g(x)$ pour $k\pi \leq x < (k+1)\pi$ où k est un entier naturel.

2. a) Démontrer que $g'(x)$ s'annule une seule fois sur $[0, \pi]$, pour une valeur α dont on précisera la position par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

b) Former le tableau de variation de g sur $[0, \pi]$.

3. a) Démontrer que $g'(x)$ s'annule deux fois sur $[\pi, 2\pi]$, pour deux valeurs β et γ dont on précisera la position par rapport à $\frac{3\pi}{2}$.

b) Former le tableau de variation de g sur $[\pi, 2\pi]$.

4. Indiquer l'allure de la courbe représentative (C) de g sur $[-\pi, 2\pi]$.

5. Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

On pourra utiliser la partie entière de $\frac{x}{\pi}$.

PROBLEME II (10 points)

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ formé du polynôme nul et des polynômes P vérifiant $d^\circ P \leq n$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I

1. Déterminer les polynômes L_0, L_1, L_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} L_0(0) = 1, L_0(1) = L_0(2) = 0 \\ L_1(1) = 1, L_1(0) = L_1(2) = 0 \\ L_2(2) = 1, L_2(0) = L_2(1) = 0 \end{cases}$$

2. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base sont $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$.

3. Former la matrice de passage A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4. Calculer les valeurs propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

5. a) Déterminer le sous-espace propre de A relatif à sa valeur propre entière.

b) En déduire les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$$

Partie II

Etant donné $n + 1$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vérifiant $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, on considère les $n + 1$ polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définis par :

$$\begin{cases} L_i(a_i) = 1, 0 \le i \le n \\ L_i(a_j) = 0, 0 \le i \le n, 0 \le j \le n, i \ne j \end{cases}$$

1. Déterminer les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$. Indiquer leurs degrés.

2. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont $P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)$.

3. On note A la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déduire de la question 2, sans calcul, son inverse A^{-1}.

4. Démontrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$$

Pour cela on pourra étudier les racines du polynôme :

$$Q = 1 - \sum_{i=0}^{n} L_i$$

En déduire la somme des éléments de la première ligne de A et la somme des éléments de chacune des autres lignes.

5. On suppose que $a_0 = 0$. Démontrer que 1 est valeur propre de A. En déduire qu'il existe des polynômes non nuls P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) X^i$$

6. On suppose que $a_0 = 1$. Démontrer que la somme des éléments de la première colonne de A est égale à 1 et que la somme des éléments de chacune des autres colonnes est nulle.

7. On suppose que $a_i = i$ pour tout entier naturel i, $0 \leq i \leq n$. On pose $Q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel p, $1 \leq p \leq n$, on note Q_p le polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par :

$$\begin{cases} Q_p(p) = 1 \\ Q_p(k) = 0 \text{ si } 0 \leq k \leq p-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Calculer $Q_p(X)$.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}'' = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III. Retour à la partie I. Rappelons que $n = 2$ et $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

1. Former la matrice de passage B de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$.

2. En utilisant la relation $B = AC$, calculer la matrice de passage C de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.

3. Déduire de 1 et 2 que A est le produit de deux matrices triangulaires que l'on précisera.

NOTA :

- Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies.
- Les épreuves sont d'une durée limitée. Aucun brouillon ne sera accepté, la gestion du temps faisant partie intégrante des épreuves.