## Problème 1

① a) $F(x)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ssi

$$0 \leq F(x) \leq 1$$
$$\text{et } F(\infty) = 1$$

• quand $x$ tend vers $+\infty$, $|x| = x > 0$

et $F(x) = \dfrac{a(x+4)}{b+x}$ et doit tendre vers 1

$$\Rightarrow \frac{ax}{x} \to 1 \Rightarrow a \to 1$$

donc $a = 1$

• $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)}{b+|x|} \leq 1 \quad \forall x$$

$$\begin{cases} \forall\ x \geq 0 & \dfrac{(x+4)}{b+x} \leq 1 \iff x+4 \leq b+x \quad \text{car } b>0 \text{ et } x \geq 0 \\ \forall\ -4 < x < 0 & \dfrac{(x+4)}{b-x} \leq 1 \iff x+4 \leq b-x \quad \text{car } b>0 \text{ et } -x>0 \end{cases}$$

(et)

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \leq b & \text{quand } x>0 \\ 2x+4 \leq b & \text{quand } x<0 \end{cases}$$

ce qui revient à $4 \leq b \ \forall x$

donc pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire ssi

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b \geq 4$$

b) par définition $f(x) = F'(x)$

si $x \leq -4$ $\quad f(x) = 0$

si $x > -4$ $\quad f(x) = \left(\dfrac{(x+4)}{b+|x|}\right)'$
et $b \geq 4$

on distingue deux cas :

si $x \geq 0$ $\quad f(x) = \left(\dfrac{x+4}{b+x}\right)'$ $\quad$ car $|x| = x$

$$f(x) = \left((x+4)\ (b+x)^{-1}\right)'$$

or $\quad (uv)' = u'v + vu'$

donc $f(x) = (b+x)^{-1} + (x+4) \times (-1) \times (b+x)^{-2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{b+x} - \frac{(x+4)}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{b + \cancel{x} - \cancel{x} - 4}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{b-4}{(b+x)^2}$$

si $\quad -4 < x < 0$ $\quad f(x) = \left(\dfrac{x+4}{b-x}\right)'$ $\quad$ car $|x| = -x$

$$\Rightarrow f(x) = (b-x)^{-1} + (-1) \times (-1) \times (x+4) \times (b-x)^{-2}$$

$$= \frac{b-x}{(b-x)^2} + \frac{x+4}{(b-x)^2}$$

$$= \frac{b+4}{(b-x)^2}$$

Pour récapituler :

$f(x) = 0$ si $x \leq -4$

$f(x) = \dfrac{b+4}{(b-x)^2}$ si $-4 < x < 0$

$f(x) = \dfrac{b-4}{(b+x)^2}$ si $x \geq 0$.

2) pour $a = 1$ et $b = 4$, on a :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{8}{(4-x)^2} & \text{si } -4 < x < 0 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ par définition

$$= \int_{-4}^{0} \frac{8x}{(4-x)^2}\, dx$$

on fait une intégration par partie avec
$u' = (4-x)^{-2}$ d'où $u = (4-x)^{-1}$
et $v = x$

donc $E(x) = 8 \times \left( \left[ (4-x)^{-1} \times x \right]_{-4}^{0} - \int_{-4}^{0} (4-x)^{-1}\, dx \right.$

$$= 8 \left( \frac{4}{8} + \left[ \ln(4-x) \right]_{-4}^{0} \right)$$

$$= 4 + 8 \times (\ln 4 - \ln 8)$$
$$= 4 + 8 \times \ln \frac{1}{2}$$

$$\underline{E(x) = 4 - \ln 2^8 \simeq -1{,}545}$$

- $\underline{V(x) = E(x^2) - E(x)^2}$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \frac{8x^2}{(4-x)^2}\, dx$$

$$= 8 \times \left( \left[ (4-x)^{-1} \times x^2 \right]_{-4}^{0} - \int_{-4}^{0} 2x (4-x)^{-1}\, dx \right)$$

$$= 8 \times \left( -\frac{16}{8} + \left[ 2x \ln(4-x) \right]_{-4}^{0} - 2\int_{-4}^{0} \ln(4-x)\, c \right.$$

$$\Rightarrow E(x^2) = -16 + 16 \ln 8 - 16 \int_{-4}^{0} \ln(4-x)\, dx$$

(b) $F_Z(z) = P(Z < z)$

$= P(\min(X,Y) < z)$

$= 1 - P(\min(X,Y) \geq z)$

$= 1 - P(X \geq z \text{ et } Y \geq z)$

$= 1 - P(X \geq z)\, P(Y \geq z)$ car $X$ et $Y$ sont

$= 1 - (1 - P(X<z))(1 - P(Y<z))$ indépendants

$= 1 - (1 - F(z))\,(1 - F(z))$ car $X$ et $Y$ ont

$\Rightarrow F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^2$ la même loi

OR pour $a = 1$ et $b = 4$ $F(z)$ s'écrit :

$$\begin{cases} F(z) = 0 \text{ si } z \leq -4 \\ F(z) = \dfrac{z+4}{4-z} \text{ si } -4 < z < 0 \\ F(z) = 1 \text{ si } z \geq 0 \end{cases}$$

d'où $F_Z(z) = 1 - (1-0)^2 = 0$ si $z \leq -4$

$F_Z(z) = 1 - \left(1 - \dfrac{z+4}{4-z}\right)^2$ si $z \in ]-4, 0[$

$F_Z(z) = 1 - (1-1)^2 = 1$ si $z \geq 0$.

Pour récapituler :

$$\begin{cases} F_Z(z) = 0 \text{ si } z \leq -4 \\ F_Z(z) = 1 - \left(1 - \dfrac{z+4}{4-z}\right)^2 \text{ si } -4 < z < 0. \\ F_Z(z) = 1 \text{ si } z \geq 0. \end{cases}$$

## Problème 2

1) A est un dé équilibré donc chacune des faces a 1/6 d'apparaître

X a deux modalités : 1 , -2

donc

$$P(X=1) = \frac{4}{6}$$ puisque quatre faces présentent $\{1\}$

$$\Rightarrow \underline{P(X=1) = \frac{2}{3}}$$

$$P(X=-2) = \frac{2}{6}$$ puisque deux faces sur six présentent $\{-2\}$

$$\Rightarrow \underline{P(X=-2) = \frac{1}{3}}$$

2) $S = |X+Y|$

S peut prendre comme valeur : 0, 1, 2, 3, 4

car

| X+Y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x = 1 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| x = -2 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |

(*)

Nous déterminons la loi de S à partir de la formule des probabilités totales :

$(A, \bar{A})$ système complet alors $P(B) = P(B/A)\,P(A) + P(B/\bar{A})\,P(\bar{A})$

ici $(1,-2)$ forme un système complet pour X

d'où

$$P(S=0) = P(S=0 \mid X=1)\;P(X=1) + P(S=0 \mid X=-2)\;P(X=-2)$$
$$= P(Y=-1)\;P(X=1) + P(Y=2)\;P(X=-2)$$

à l'aide du tableau (*)

$$\Rightarrow P(S=0) = \frac{16}{63} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{63} \times 1/3$$

$$\Rightarrow P(S=0) = \frac{34}{189}$$

$$P(S=1) = P(S=1 \mid X=1)\ P(X=1) + P(S=1 \mid X=-2)\ P(X=-2)$$
$$= P(Y=-2 \text{ ou } Y=0)\ P(X=1)$$
$$+ P(Y=1 \text{ ou } Y=3)\ P(X=-2)$$
$$= \left(\frac{32}{63} + \frac{8}{63}\right) \times \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{63} + \frac{1}{63}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{P(S=1) = \frac{85}{189}}$$

$$P(S=2) = P(S=2 \mid X=1)\ P(X=1) + P(S=2 \mid X=-2)\ P(X=-2)$$
$$= P(Y=1)\ P(X=1) + P(Y=0)\ P(X=-2)$$
$$= \frac{4}{63} \times \frac{2}{3} + \frac{8}{63} \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{P(S=2) = \frac{16}{189}}$$

$$P(S=3) = P(S=3 \mid X=1)\ P(X=1) + P(S=3 \mid X=-2)\ P(X=-2)$$
$$= P(Y=2)\ P(X=1) + P(Y=-1)\ P(X=-2)$$
$$= \frac{2}{63} \times \frac{2}{3} + \frac{16}{63} \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{P(S=3) = \frac{20}{189}}$$

$$P(S=4) = P(S=4 \mid X=1)\ P(X=1) + P(S=4 \mid X=-2)\ P(X=-2)$$
$$= P(Y=3)\ P(X=1) + P(Y=-2)\ P(X=-2)$$
$$= \frac{1}{63} \times \frac{2}{3} + \frac{32}{63} \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{P(S=4) = \frac{34}{189}}$$

Pour récapituler, la loi de $S$ est déterminée par :

$$\left|\begin{array}{l} P(S=0) = \frac{34}{189} \\ P(S=1) = \frac{85}{189} \\ P(S=2) = \frac{16}{189} \\ P(S=3) = \frac{20}{189} \\ P(S=4) = \frac{34}{189} \end{array}\right.$$

la loi du coupe $(X, S)$ est:

- $P(X=1, S=0) = P(S=0 \mid X=1) \times P(X=1)$
$= P(Y=-1) \; P(X=1)$

$\Rightarrow P(X=1, S=0) = \frac{32}{189}$

- $P(X=1, S=1) = P(S=1 \mid X=1) \times P(X=1)$
$= P(Y=-2 \text{ ou } Y=0) \; P(X=1)$

$\Rightarrow P(X=1, S=1) = \frac{80}{189}$

- $P(X=1, S=2) = P(S=2 \mid X=1) \; P(X=1)$
$= P(Y=1) \; P(X=1)$

$\Rightarrow P(X=1, S=2) = \frac{8}{189}$

- $P(X=1, S=3) = P(S=3 \mid X=1) \; P(X=1)$
$= P(Y=2) \; P(X=1)$

$\Rightarrow P(X=1, S=3) = \frac{4}{189}$

- $P(X=1, S=4) = P(S=4 \mid X=1) \; P(X=1)$
$= P(Y=3) \; P(X=1)$

$\Rightarrow P(X=1, S=4) = \frac{2}{189}$

- $P(X=-2, S=0) = P(S=0 \mid X=-2) \; P(X=-2)$
$= P(Y=2) \; P(X=-2)$

$\Rightarrow P(X=-2, S=0) = \frac{2}{189}$

- $P(X=-2, S=1) = P(S=1 \mid X=-2) \; P(X=-2)$
$= P(Y=-1 \text{ ou } Y=3) \; P(X=-2)$

$\Rightarrow P(X=-2, S=1) = \frac{5}{189}$

- $P(X=-2, S=2) = P(S=2 \mid X=-2) \; P(X=-2)$
$= P(Y=0) \; P(X=-2)$

$\Rightarrow P(X=-2, S=2) = \frac{8}{189}$

$P(X=-2, S=3) = P(S=3 \mid X=-2)\ P(X=-2)$
$= P(X=-1)\ P(X=-2)$

$\Rightarrow \underline{P(X=-2, S=3) = \frac{16}{189}}$

$P(X=-2, S=4) = P(S=4 \mid X=-2)\ P(X=-2)$
$= P(Y=-2)\ P(X=-2)$

$\Rightarrow \underline{P(X=2, S=4) = \frac{32}{189}}$

3) Pour que X et S soient indépendantes, il faut que $\forall x_i\ \forall s_i$
$P(X=x_i, S=s_i) = P(X=x_i)\ P(S=s_i)$

oR si on prend $x_i = 1$ $s_i = 0$
$P(X=1, S=0) = \frac{32}{189}$

et $P(X=1) \times P(S=0) = \frac{2}{3} \times \frac{34}{189} \neq \frac{32}{189}$

<u>donc X et S ne sont pas indépendantes</u>

4) $E(X) = 1 \times P(X=1) - 2 \times P(X=-2)$ par définition de l'espérance d'une variable discrète

$= 1 \times \frac{2}{3} - 2 \times 1/3$

$\Rightarrow \underline{E(X) = 0}$.

$E(S) = 0 \times P(S=0) + 1 \times P(S=1) + 2 \times P(S=2)$
$+ 3 \times P(S=3) + 4 \times P(S=4)$
$= \frac{85}{189} + 2 \times \frac{16}{189} + 3 \times \frac{20}{189} + 4 \times \frac{34}{189}$

$= \frac{313}{189}$

$\Rightarrow \underline{E(S) = \frac{313}{189}}$.

5) • $\operatorname{cov}(X,S) = E(XS) - E(X)E(S)$ par définition

$\Rightarrow \overline{\operatorname{cov}(X,S) = E(XS)}$ car $E(X) = 0$.

or $E(XS) = 1 \times 0 \times P(X=1, S=0) + 1 \times 1 \times P(X=1, S=1)$
$+ 1 \times 2 \times P(X=1, S=2) + 1 \times 3 \times P(X=1, S=3)$
$+ 1 \times 4 \times P(X=1, S=4) + (-2) \times 0 \times P(X=-2, S=0)$
$+ (-2) \times 1 \times P(X=-2, S=1) + (-2) \times 2 \times P(X=-2, S=2)$
$+ (-2) \times 3 \times P(X=-2, S=3) + (-2) \times 4 \times P(X=-2, S=4)$

par définition de l'espérance d'un couple de variables aléatoires discrète :

$$\underline{E(XS) = \sum_{x_i} \sum_{s_i} x_i \, s_i \, P(X = x_i, S = s_i)}$$

donc $E(XS) = \frac{80}{189} + \frac{16}{189} + \frac{12}{189} + \frac{8}{189} - \frac{10}{189} - \frac{32}{189} - \frac{96}{189} - \frac{256}{189}$

$E(XS) = \frac{-278}{189}$

donc $\underline{\operatorname{cov}(X,S) = -\frac{278}{189} \simeq -1{,}471}$

• $\rho(X,S) = \frac{\operatorname{cov}(X,S)}{\sigma(X)\,\sigma(S)}$ par définition

or $v(X) = E(x^2) - E(x)^2$

on calcule $E(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2 \, P(X = x_i)$ par définition

donc $E(X^2) = 1 \times \frac{2}{3} + (-2)^2 \times \frac{1}{3} = 2$

d'où $E(x^2) = 1 \times \frac{2}{3} + (-2)^2 \times \frac{1}{3} = 2$

d'où $\underline{v(x) = 2}$ puisque $E(x) = 0$.

on calcule de la même façon $E(S^2) = \sum_{S_i} s_i^2 \, P(S = s_i)$

$E(S^2) = \frac{85}{189} + 2^2 \times \frac{16}{189} + 3^2 \times \frac{20}{189} + 4^2 \times \frac{34}{189}$

$= \frac{873}{189}$

$$\Rightarrow V(S) = E(S^2) - E(S)^2$$

$$= \frac{873}{189} - \left(\frac{313}{189}\right)^2$$

$$= \frac{67\ 028}{35\ 721}$$

$$V(S) = 1{,}876$$

donc $\rho \simeq \frac{-1{,}471}{\sqrt{2} \times \sqrt{1{,}876}}$

$$\rho \simeq \underline{-0{,}759}.$$

# Problème III

On souhaite tester $H_0 : X \sim \mathcal{P}(0{,}02)$

$H_1 : X \not\sim \mathcal{P}(0{,}02)$

avec X : nombre de pannes par ordinateur

1) ⓐ sous $H_0$ : $P(x = k) = e^{-0{,}02} \dfrac{(0{,}02)^k}{k!}$

la table de la loi de poisson nous indique que pour $\lambda = 0{,}02$ :

$$P(X=0) = 0{,}9802$$
$$P(X=1) = 0{,}0196$$
$$P(X=2) = 0{,}0002$$

Les effectifs théoriques sont $\underline{N_i^t = n \times P(X=i)}$

$n = 20000$

donc $N_0^t = 20\,000 \times P(X=0)$

$= 20\,000 \times 0{,}9802$

$\Rightarrow \underline{N_0^t = 19\,604}$

$N_1^t = 20\,000 \times 0{,}0196$

$\Rightarrow \underline{N_1^t = 392}$

$N_2^t = 20000 \times 0{,}0002$

$\Rightarrow \underline{N_2^t = 4}$

ⓑ La valeur expérimentale est donnée par la formule appliquée à notre étude :

$$Q_e^2 = \sum_{i=0}^{2} \frac{(N_i - N_i^t)^2}{N_i^t}$$ avec $N_i$ les effectifs observés

donc $Q^2_e = \dfrac{(19620 - 19604)^2}{19604} + \dfrac{(374 - 392)^2}{392} + \dfrac{(6-4)^2}{4}$

$\underline{Q_e^2 = 1{,}84}$

ⓒ Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de modalités de X moins 1 moins le nombre de paramètres estimés.

ici $\lambda$ n'est pas estimé mais donné théoriquement et X a 3 modalités $\{0, 1, 2\}$

d'où $\quad v = 3 - 1$

$\Rightarrow \quad v = 2$

ⓓ sous $H_0 \quad Q^2 \sim \chi^2_2$

Au risque de 5%, le seuil critique est tel que :

$$P(Q^2 < a) = 0,95$$

$$(\Leftrightarrow) \quad P(Q^2 > a) = 1 - 0,95 = 0,05$$

La table nous donne les valeurs de $\chi^2$ ayant la probabilité q d'être dépassé. Donc on trouve

$\underline{a = 5,99}$ pour $q = 0,05$ $\underline{\text{et } v = 2}$

ⓔ $Q^2_e = 1,84 < a$ donc <u>on accepte $H_0$</u> si on retient le risque de 5%.

## Problème 4

$X \sim N(19, \sigma)$

1) ⓐ $\bar{x} = \sum_{i=1}^{10} \frac{x_i}{10}$ la moyenne empirique

$$= \frac{17 + 20 + 19 + 20 + 17 + 22 + 18 + 19 + 21 + 18}{10}$$

$$= \frac{191}{10}$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{x} = 19,1}$$

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$$ la variance empirique corrigée

$$= \frac{1}{9} \Big( (17-19,1)^2 + (20-19,1)^2 + (19-19,1)^2 + (20-19,1)^2 + (17-19,1)^2 + (22-19,1)^2 + (18-19,1)^2 + (19-19,1)^2 + (21-19,1)^2 + (18-19,1)^2 \Big)$$

$$\Rightarrow \underline{S^2 = 1,66}$$

(b) $\bar{x}$ est une estimation non biaisée de la moyenne si et seulement si $E(\bar{x}) = m$

or $E\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(x_i)$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{1}{n} \times n \times E(x_i)$ car les $x_i$ sont indépendants

$\Rightarrow \underline{E(\bar{x}) = m}$ car les $x_i$ suivent une loi normale d'espérance $m$

donc $\underline{\bar{x} \text{ est une estimation non biaisée de la moyenne}}$

de même, $E(s^2) = E\left(\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)$

$= \frac{1}{(n-1)} E\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)$ par linéarité de l'espérance

or $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - m) - (\bar{x} - m)\right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 - 2(\bar{x} - m) \sum_{i=1}^{n} (x_i - m) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - m)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 - 2(\bar{x} - m)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m}{n}\right) + \frac{n}{n}(\bar{x} - m)$$

$$= V(x) - 2(\bar{x} - m)(\bar{x} - m) + (\bar{x} - m)^2$$

$$= V(x) - (\bar{x} - m)^2$$

$$= V(x) - \bar{x}^2 + 2\bar{x}m - m^2$$

d'où $E(s^2) = \frac{1}{n-1} \times E\left(n\left(v(x) - \bar{x}^2 + 2\bar{x}m - m^2\right)\right)$

$= \frac{n}{n-1}\left(v(x) - E(\bar{x}^2) + 2E(\bar{x})m - m^2\right)$

car $V(x)$ et $m$ ne sont pas des variables aléatoires donc $E(m) = m$ et $E(v(X)) = v(X)$

OR $V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - E(\bar{X})^2$

donc $E(\bar{X}^2) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) + E(\bar{X})^2$

$= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + m^2$

car $E(\bar{X}) = m$ et par propriété de la variance

OR les $X_i$ sont indépendants et de même variance $V(X)$

d'où $E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X) + m^2$

$= \frac{1}{n} V(X) + m^2$

d'où $E(s^2) = \frac{n}{n-1}\left(V(X) - \frac{1}{n} V(X) - \cancel{m^2} + \cancel{2m^2} - \cancel{m^2}\right)$

$= \frac{n\,V(x) - V(x)}{n-1}$

d'où $E(s^2) = V(X)$

donc $s^2$ est une estimation non biaisée de $\sigma^2$

2) $\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

dans notre étude $n = 10$ et nous utilisons cette propriété pour trouver $a$ et $b$ tel que

$P\left(a < \frac{ns^2}{\sigma^2} < b\right) = 0{,}95$

la loi du khi-deux n'étant pas symétrique, nous regardons la table pour $v = 9$ et nous trouvons

$a = 2{,}70$ pour $q = 0{,}975$ et $b = 19{,}0$ pour $q = 0{,}025$

car la table nous donne les valeurs de $\chi^2$ ayant la probabilité d'être dépassées et

$$\begin{aligned} P(u < \chi^2 < v) &= P(\chi^2 < v) - P(\chi^2 < u) \\ &= 1 - P(\chi^2 > v) - 1 + P(\chi^2 > u) \\ &= P(\chi^2 > u) - P(\chi^2 > v) \end{aligned}$$

donc pour avoir $P(u < \chi^2 < v) = 0{,}95$

nous prenons $P(\chi^2 > u) = 0{,}975$

et $P(\chi^2 > v) = 0{,}025$

donc au risque de 5%, on trouve que

$$2{,}70 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < 19$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{19} < \frac{\sigma^2}{ns^2} < \frac{1}{2{,}70}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{ns^2}{19} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{2{,}70}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{10 \times 1{,}66}{19}} < \sigma < \sqrt{\frac{10 \times 1{,}66}{2{,}70}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{0{,}935 < \sigma < 2{,}479}$$