CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

OCTOBRE 2005

COMPOSITION PORTANT SUR LES MATHEMATIQUES

EPREUVE N° 34

Durée : 5 heures
Coefficient : 2

SUJET :

TRES IMPORTANT : Il est rappelé qu'aucun signe distinctif ne doit apparaître sur la copie.

SUJET :

PROBLEME I (10 points)

Notation

- Pour tout entier naturel p, $p \geq 2$, on note $\mathcal{M}_p$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels et I_p la matrice unité d'ordre p.

- On note $a_{ij}(A)$ l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la *i-ème* ligne et de la *j-ème* colonne.

- On dit qu'une suite (A_n) de matrices de $\mathcal{M}_p$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_p$ si pour tout couple (i, j) d'entiers, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} a_{ij}(A_n) = a_{ij}(A)$$

ce que l'on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} (A_n) = A$$

- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p$ et pour tout entier naturel n on pose :

$$C_n = \frac{1}{n+1}(I_p + A + A^2 + \cdots + A^n)$$

- Soit r un entier naturel, $r \geq 1$; une matrice A de $\mathcal{M}_p$ est dite *r- périodique* si $A^r = I_p$

L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la suite (C_n).

Partie I

Etant donné un nombre réel α, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n+1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)$$

1. Calculer a_n si $\alpha = 1$, puis si $\alpha \neq 1$.

2. Etudier, en fonction de α, la convergence de la suite (a_n) et le cas échéant préciser sa limite.

Partie II

On suppose $p = 3$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et $B = I_3 + A + A^2$.

2. Pour tout entier naturel k, calculer A^{3k}, A^{3k+1} et A^{3k+2}.

3 Exprimer C_{3k-1}, C_{3k} et C_{3k+1} sous forme de combinaison linéaire des matrices I_3, A et B. En déduire que la suite (C_n) converge vers une limite C que l'on précisera.

4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant C pour matrice dans cette base.

Démontrer que v est un projecteur. Déterminer son noyau F et son image G. Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Partie III

On suppose $p = 2$ et :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A.

2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. En déduire, sans calculs, l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que :

$$D = P^{-1}AP$$

Expliciter D, P et P^{-1}.

4. Démontrer que pour tout entier naturel k, $k \geq 1$, on a :

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

En déduire qu'il existe deux matrices U et V, indépendantes de k, telles que :

$$A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V$$

5. Exprimer C_n en fonction de n, U et V. En déduire que la suite (C_n) converge vers une limite C que l'on précisera.

6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant C pour matrice dans cette base.

Démontrer que u est un projecteur. Déterminer son noyau F et son image G.

Partie IV. Etude de C_n lorsque A est *r-périodique*.

1. Etant donné un nombre entier r, $r > 0$, on dit qu'une suite de nombres réels (α_k) est *r-périodique* si pour tout entier naturel k on a :

$$\alpha_{k+r} = \alpha_k$$

On pose :

$$c = \frac{1}{r}(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1})$$

et pour tout entier naturel n :

$$c_n = \frac{1}{n+1}(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1} = rc$$

b) Pour tout entier naturel n on pose :

$$b_n = (n+1)(c_n - c)$$

Démontrer que la suite (b_n) est *r-périodique* ; en déduire qu'elle est bornée.

c) Démontrer que la suite (c_n) converge et préciser sa limite.

2. Soit A une matrice carrée d'ordre p qui est *r-périodique*.

a) Démontrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et p, la suite de terme général :

$$\alpha_n = a_{ij}(A^n)$$

est *r-périodique*. En déduire que la suite de matrices (C_n) converge vers la matrice :

$$C = \frac{1}{r}(I_p + A + \cdots + A^{r-1})$$

b) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ ayant respectivement pour matrices A et C dans $\mathcal{B}$; on note e l'application identique de $\mathbb{R}^p$.

Démontrer que :

$$u^r = e$$

et que :

$$u \circ v = v \circ u = v$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Démontrer que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$.

d) Démontrer que $x \in Im\, v$ si et seulement si $u(x) = x$.

En déduire que :

$$Im\, v = Ker(u - e)$$

e) Démontrer que v est un projecteur.

f) Démontrer que $Im(u - e) \subset Ker\, v$.

En déduire que cette inclusion est une égalité.

PROBLEME II (10 points)

Partie A

Pour tout nombre complexe z on pose :

$$sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ et } ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

1. Démontrer que :

$$sin\,(iz) = i\,sh\,z \text{ et } cos\,(iz) = ch\,z$$

2. En déduire que :

$$sh\,z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } ch\,z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Les parties B, C, D et E sont indépendantes

Partie B

On considère la série de terme général $\dfrac{cos(nx)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On pose :

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{cos(nx)}{2^n}$$

2. a) Calculer $s_1(0)$ et $s_1(\pi)$.

b) Démontrer que la série de terme général :

$$\frac{e^{inx}}{2^n}, n \in \mathbb{N}$$

converge sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme, notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n}$. En déduire la valeur de $s_1(x)$.

Partie C

On considère la série de terme général $\dfrac{cos(2nx)}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$s_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{cos(2nx)}{(2n)!}$$

2. Démontrer que la série de terme général $\frac{e^{2inx}}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2inx}}{(2n)!}$$

En déduire la valeur de $s_2(x)$.

3. Démontrer que s_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$s'_2(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{(2n-1)!}$$

Partie D

Etant donné un nombre réel α, $|\alpha| < 1$, on considère la série de terme général :

$$\frac{\alpha^n \cos(nx)}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

1. Démontrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$s_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n}$$

2. Démontrer que s_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$s'_3(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \sin(nx)$$

3. Démontrer que la série de terme général $\alpha^n e^{inx}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme notée $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{inx}$. En déduire la valeur de $s'_3(x)$.

4. Déduire de la question précédente la valeur de $s_3(x)$.

5. En utilisant les résultats précédents démontrer que :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = 0$$

Partie E

Etant donné un nombre réel α, on considère la série de terme général :

$$\frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On pose :

$$s_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

2. Démontrer que :

$$s_4(x) = e^{\alpha \cos x} \cos(\alpha \sin x)$$

3. Soit a un nombre réel qui n'est pas un entier relatif.

Démontrer que :

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(ax) \cos(\sin x)\, dx = f(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(a^2 - n^2)}$$

où f est une fonction que l'on déterminera.