CONCOURS EXTERNE D'ADMINISTRATEUR TERRITORIAL

OCTOBRE 2004

COMPOSITION PORTANT SUR LES MATHEMATIQUES

EPREUVE N° 34

Durée : 5 heures
Coefficient : 2

SUJET :

PROBLEME I (5 points)

Pour tout entier naturel n, $n \geq 1$, on considère la fonction numérique f_n définie par :

$$f_n(x) = e^{-n^2x^2}$$

1. a) Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(0) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ pour } x \neq 0$$

b) On note f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Etudier la continuité de f_n et celle de f.

2. Démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$:

a) Sans calculs (en utilisant les résultats de la question 1.).

b) Par un calcul direct.

3. Etant donné deux nombres réels a et b, tels que $0 < a < b$.

a) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a, b]$.

b) Etant donné un entier naturel n, $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_a^b e^{-n^2x^2}\, dx$$

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n$$

4. On considère la fonction numérique g_n définie par :

$$g_n(x) = xf_n(x)$$

Former le tableau de variation de g_n sur $[0, +\infty[$.

5. Calculer $f'_n(x)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} f'_n(x)$.

6. On considère la fonction numérique F définie par :

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$$

a) Démontrer que la suite (f'_n) ne converge pas uniformément vers F sur $[0, +\infty[$.

b) Démontrer que la suite (f'_n) converge uniformément vers F sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

PROBLEME II (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Pour tout nombre réel strictement positif R, on note D_R le disque de centre O et de rayon R et C_R le carré défini par $|x| \leq R$ et $|y| \leq R$. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

On pose :

$$J_R = \iint_{D_R} f(x, y)\,dx\,dy \text{ et } K_R = \iint_{C_R} f(x, y)\,dx\,dy$$

1. Représenter géométriquement D_R, D_{2R} et C_R sur le même graphique. En déduire que :

$$J_R \leq K_R \leq J_{2R}$$

2. Calculer J_R en utilisant les coordonnées polaires ; en déduire la valeur de :

$$J = \lim_{R \to +\infty} J_R$$

3. Démontrer que $\lim\limits_{R \to +\infty} K_R$ existe et donner la valeur K de cette limite.

4. On pose :

$$I_R = \int_{-R}^{+R} e^{-t^2}\,dt$$

Démontrer que :

$$K_R = I_R^2$$

En déduire $I = \lim\limits_{R \to +\infty} I_R$.

5. Etant donné un nombre réel a, $a > 0$, on pose :

$$I_R(a) = \int_{-R}^{+R} e^{-at^2} dt$$

Exprimer $I_R(a)$ en fonction de $I_{R\sqrt{a}}$. En déduire la valeur de :

$$I(a) = \lim_{R \to +\infty} I_R(a)$$

PROBLEME III (10 points)

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie égale à n. On note id_E l'application identique de E. Pour tout endomorphisme f de E on pose :

$$f^0 = id_E \text{ et } f^{k+1} = f^k \circ f$$

pour tout entier naturel k.

Etant donné un endomorphisme f de E et un entier naturel p, $p > 1$, on dit que f est cyclique d'ordre p s'il existe un vecteur a de E vérifiant les trois conditions suivantes :

i) $f^p(a) = a$.

ii) Les p vecteurs $a, \ldots, f^k(a), \ldots, f^{p-1}(a)$ sont deux à deux distincts.

iii) La famille $(a, \ldots, f^k(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ engendre E.

On dit alors que cette famille est un cycle d'ordre p de f.

Partie A

Etude d'un exemple pour $n = 3$.

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E ayant pour matrice dans cette base :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. a) Démontrer que la famille :

$$(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$$

est une base de E.

b) Former la matrice A_1 de f relativement à cette base.

2. a) Calculer A_1^4. En déduire f^4 et A^4.

b) Démontrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle d'ordre 4 de f.

3. a) Calculer les valeurs propres de f. Est-ce que f est diagonalisable ?

b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

4. a) Déduire des résultats précédents la solution générale du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x - 2y - 3z \end{cases}$$

b) En déduire les solutions réelles de ce système différentiel.

Partie B

Etude du cas particulier où f est cyclique d'ordre n.

Soit $F = (a, \dots, f^k(a), \dots, f^{n-1}(a))$ un cycle d'ordre n de f.

1. Démontrer que F est une base de E. Déterminer la matrice B de f dans cette base.

2. Calculer les valeurs propres de f. Est-ce que f est diagonalisable ?

3. Déterminer les sous-espaces propres de f.

Partie C

Etude du cas général.

Soit f un endomorphisme cyclique d'ordre p de E et $(a, \dots, f^k(a), \dots, f^{p-1}(a))$ un cycle d'ordre p de f.

Pour tout entier naturel k, $k \geq 1$, on pose $F_k = (a, \dots, f^{k-1}(a))$.

1. a) Démontrer que $p \geq n$ et que les vecteurs de F_p sont invariants par f^p.

b) En déduire que $f^p = id_E$ et que f est bijective. Exprimer f^{-1} à l'aide de f.

2. a) Démontrer que, si F_k est libre, alors $k \leq n$.

Dans toute la suite on note m le plus grand entier naturel k tel que F_k soit libre.

b) Démontrer par récurrence sur q, que pour tout entier naturel $q \geq m$, $f^q(a)$ est combinaison linéaire des vecteurs de F_m.

c) Démontrer que F_m est une base de E et que $m = n$.

3. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ les coordonnées de $f^n(a)$ dans la base F_n. On pose :

$$g = \alpha_0 id_E + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel q on a :

$$g \circ f^q = f^q \circ g \text{ et } g[f^q(a)] = f^n[f^q(a)]$$

b) Démontrer que $g = f^n$. Déterminer la matrice B de f dans la base F_n.

4. a) Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de f.

b) Soit λ une valeur propre de f. Démontrer que le sous-espace propre associé à λ est une droite vectorielle.

NOTA :

➢ **Les candidats ne doivent porter aucun signe distinctif sur les copies** : pas de signature (signature à apposer <u>uniquement</u> dans le coin gommé de la copie à rabattre) ou nom, grade, même fictifs.

➢ Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.